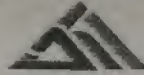


المملكة المغربية
Royaume du Maroc

*Ecole Hassania
des Travaux Publics*



المدرسة الحسنية للأشغال العمومية

**CONCOURS D'ACCES EN 1^{ère} ANNEE
POUR LES TITULAIRES DU
DEUG EN SCIENCES OU EQUIVALENT
EDITION 2015**

E H T P

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée 3h

Lundi 13 Juillet 2015

Exercice

1. Questions préliminaires

- (a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé à λ . Démontrer que x est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
- (b) Énoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le déterminant et la trace de A .
- (b) Déterminer les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$) de A et leur multiplicité.
- (c) Déterminer le vecteur propre u_3 , associé à λ_2 , dont la deuxième coordonnée dans \mathcal{B} est égale à 1.
- (d) Vérifier que $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$ et $u_2 = e_1 + e_3$ sont des vecteurs propres pour la valeur propre λ_1 .
- (e) Justifier que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E .
- (f) Déterminer la matrice de passage P de \mathcal{B} et \mathcal{B}' et calculer P^{-1} .
- (g) Diagonaliser A .
- (h) On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.
- Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A .
 - Déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.
 - Écrire le polynôme caractéristique de B .
 - Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Problème

Partie I

Dans cette première partie on étudie des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ susceptibles de vérifier une ou plusieurs des conditions suivantes :

- (1) f est dérivable dans $[a, b]$.
- (2) f est deux fois dérivable dans $[a, b]$.
- (3) $f(a) = f(b) = 0$.
- (4) Sous l'hypothèse (2), on a de plus $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.

1. Sous les hypothèses (1) et (3) montrer que, s'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) < 0$, il existe alors $c \in]a, x_0[$ et $d \in]x_0, b[$ tels que $f'(c) < f'(d)$.

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis dans les intervalles $[a, x_0]$ et $[x_0, b]$)

2. Sous les hypothèses (2), (3) et (4), que peut-on dire de la fonction f' ? En déduire en utilisant la question 1., que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$.
3. Plus généralement, si f satisfait seulement aux hypothèses (2) et (4), montrer que, quel que soit $x \in [a, b]$, on a

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(On appliquera 2. à la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$)

4. Supposons que f satisfasse uniquement à (2) et qu'il existe un réel k qui minore la dérivée seconde de f sur $[a, b]$. En utilisant la question 3. (de la partie I), montrer que

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - k \frac{(b - x)(x - a)}{2}.$$

(On pourra utiliser la fonction auxiliaire $h(x) = -f(x) - k \frac{(b - x)(x - a)}{2}$)

5. Dédurre des deux questions précédentes que s'il existe un réel $k \leq 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, on ait $k \leq f''(x) \leq 0$, alors

$$(b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - k \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Partie II

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

- $u_n = \int_n^{n+1} \ln(t) dt$
- $v_n = \int_n^{n+1} (\ln(n) + (t-n)[\ln(n+1) - \ln(n)]) dt$
- $w_n = u_n - v_n$

1. Calculer u_n , v_n et w_n .
2. Calculer $S'_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $S''_n = \sum_{k=1}^n v_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$.
3. On se propose de démontrer la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

(a) Montrer, à l'aide de la question 5. de la partie I, que

$$0 \leq w_n \leq \frac{1}{12n^2}.$$

(b) Prouver la double inégalité

$$\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^2}$$

puis l'inégalité

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

(c) En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

On désigne par l la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$.

(d) Vérifier que $l \leq \frac{1}{6}$.

4. Montrer que $\frac{n!e^n\sqrt{n}}{n^{n+1}}$ tend vers une limite finie (notée α) quand n tend vers l'infini.

5. Calculer α en fonction de l .